

О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УПА, Харків;
Ю.І. ПЕРШИНА, канд. фіз.-мат. наук, докторант, УПА Харків

ВІДНОВЛЕННЯ РОЗРИВНОЇ ВНУТРІШНЬОЇ СТРУКТУРИ ДВОВИМІРНОГО ТІЛА ЗА ВІДОМИМИ ЇЇ ПРОЕКЦІЯМИ ВЗДОВЖ ВЗАЄМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИХ ЛІНІЙ.

Запропоновано метод відновлення внутрішньої структури двовимірного тіла за відомими її проєкціями вздовж системи заданих ліній (даними Радона). Метод суттєво використовує інтерлінацію функцій та неоднорідну внутрішню структуру двовимірного тіла. Розглянуто приклад знаходження ліній розриву у фантомі Шеппа-Логана.

Ключові слова: інтерлінація, комп'ютерна томографія, фантом Шеппа-Логана, дані Радона.

Вступ. Існують багато технічних задач, в яких наближуюча функція не обов'язково є гладкою, іноді допустима її розривність – лише б похибка наближення була б достатньо мала. Наближення такого типу раніше детально не розглядалося. Мають лише підходи для розв'язання деяких технічних задач. Відповідні алгоритми працюють лише для частинних випадків.

Задачі наближення розривних функцій виникають частіше, ніж задачі наближення неперервних функцій. Наприклад, в комп'ютерній томографії при дослідженні внутрішньої структури тіла корисно використовувати його неоднорідність, тобто різну щільність в різних частинах тіла (кістки, серце, шлунок тощо мають різну щільність, тобто щільність всього тіла є функцією з розривами першого роду на системі ліній чи поверхонь); при дослідженні кори Землі за допомогою даних з кернів свердловин виникає задача відновлення внутрішньої структури кори між свердловинами. При цьому очевидним є той факт, що щільність ґрунту в різних точках кори є неоднорідною і найчастіше мають місце розриви першого роду в точках поверхонь, що відділяють одну складову кори від іншої (чорнозем, пісок, глина, тощо).

Тобто актуальною є розробка та дослідження теорії наближення розривних функцій за допомогою *розривних сплайнів* та розробка методів виявлення точок або ліній розривів функції.

Розроблені методи в подальшому будуть використовуватися для розв'язання *плоскої задачі радонівської комп'ютерної томографії*. Для цього доцільніше використовувати *оператори інтерлінації функцій*, оскільки ці оператори відновлюють функції (можливо, наближено) за відомими їх слідами на даній системі ліній. Тобто, вони надають можливість будувати оператори, інтеграли від яких по вказаних лініях (лінійні інтеграли) будуть дорівнювати інтегралам від самої відновлюваної функції. Звідси витікає, що *інтерлінація* є математичним апаратом, природно пов'язаним із задачею відновлення харак-

теристик об'єктів за відомими їх проекціями.

Тому актуальною є задача наближення такого роду функцій за допомогою конструкцій, які на вказаних лініях зберігають властивості наближуваної функції, тобто мають розриви першого роду (взагалі кажучи, з невідомими значеннями розривів).

Аналіз останніх досліджень. У роботах [1] досліджувалося наближення неперервних та неперервно-диференційованих функцій за допомогою розривних сплайнів в *чебишевській нормі*. В роботі [2] досліджувалося питання наближення неперервних функцій кусково-сталими функціями.

В роботах [3] досліджується *розривний метод Гальоркіна* високого порядку. На відміну від класичного методу Гальоркіна, розривний метод апроксимує розривний розв'язок функціями, розривними на границях розрахункової сітки.

В роботах [4] – [7] запропоновані та досліджені математичні моделі (нові класи крайових задач з розривними розв'язками), що описують процеси в неоднорідних середовищах з тонкими включеннями-тріщинами.

Для моделювання складних гладких фізичних явищ в якості потужної обчислювальної техніки використовуються *Фур'є – спектральні методи* [8]. Їх швидкість збіжності залежить від гладкості та періодичності функції в досліджуваній області. Якщо функція має розрив хоча б в одній точці, швидкість збіжності погіршується, та поряд з розривами розвиваються коливання. Така поведінка називається *явищем Гібса*. Тобто, якщо функція є розривною, то її ряд Фур'є не є гарним наближенням функції. В роботі [9] використовуються фільтри у розклади Фур'є розривних функцій. Але фільтрація не повністю знищує явище Гібса.

Таким чином, у вказаних роботах досліджувалося наближення неперервних функцій за допомогою неперервних та розривних сплайнів. Але загальної теорії таких наближень не існує. Також не існує загальної теорії наближення розривних функцій розривними сплайнами. В даній роботі автори пропонують таку загальну теорію побудови розривних сплайнів, множина яких, як частинний випадок, включають множину неперервних та неперервно-диференційованих до заданого порядку сплайнів, які можуть мати розриви першого роду у заданих точках або на заданій множині ліній – границь елементів.

В роботах [10] – [12] будуються та досліджуються інтерполяційні, апроксимаційні, а також інтерлінаційні розривні сплайни для наближення розривних функцій від двох змінних з областю визначення, яка розбивається на прямокутні та трикутні елементи. Причому в цих роботах вважалося, що лінії розриву відомі. В роботі [13] автори запропонували метод відновлення розривної функції однієї змінної за відомими значеннями цієї функції в точках заданої сітки, використовуючи розривний апроксимаційний сплайн. Тобто точки розриву заданої функції наперед досліднику невідомі.

В даній роботі автори пропонують метод відновлення розривної функції двох змінних та знаходження її ліній розриву за відомими проекціями вздовж системи взаємно перпендикулярних ліній (*даних Радона*). Саме за такою інформацією і відновлюється внутрішня структури тіла в комп'ютерній та сейсмічній томографії. Новий метод базується на методи, викладеному в [2], та суттєво використовує неоднорідну внутрішню структуру двовимірного тіла.

Постановка задачі. Припустимо, що досліджуваний об'єкт повністю розміщений в області $E = [0; 1]^2$ (це обмеження не є суттєвим). Невідому густину цього тіла позначимо через $f(x, y)$ і будемо вважати, що $f(x, y) = 0$, $(x, y) \notin E$. Проведемо через область E прямі лінії

$$x_1 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1, \quad y_1 = 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1.$$

Будемо вважати відомими інтеграли вздовж цих прямих (проекції або дані Радона), причому на одній лінії відомі одразу два інтеграли (зліва та справа від лінії):

$$\gamma_j^{l(+)} = \int_0^1 f(x, y_j + 0) dx, \quad j = \overline{1, m}, \quad \gamma_j^{l(-)} = \int_0^1 f(x, y_j - 0) dx, \quad j = \overline{1, m},$$

$$\gamma_i^{2(+)} = \int_0^1 f(x_i + 0, y) dy, \quad i = \overline{1, n}, \quad \gamma_i^{2(-)} = \int_0^1 f(x_i - 0, y) dy, \quad i = \overline{1, n}.$$

За заданою інформацією потрібно побудувати розривний інтерлінаційний сплайн, за допомогою якого відновимо лінії розриву в розривній функції двох змінних.

Побудова розривного інтерлінаційного сплайну за відомими даними Радона. Розглянемо прямокутний елемент

$$\Pi_{ij} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}.$$

Означення. Будемо називати розривним інтерлінаційним сплайном в області E , відповідним заданому розбиттю на підобласті Π_{ij} , наступну функцію:

$$S(x, y) = S_{ij}(p, x, y), \quad (x_i, y_j) \in \Pi_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (1)$$

де p – номер прямокутного елемента, він залежить від індексів i, j ,

$$S1_{ij}(p, x, y) = h_i(x) \cdot \left(\gamma_i^{2(+)} + (U_{p,1} - \gamma_i^{2(+)}) \cdot \varphi_j(y) + (U_{p,3} - \gamma_i^{2(+)}) \cdot \varphi_{j+1}(y) \right) +$$

$$+ h_{i+1}(x) \cdot \left(\gamma_{i+1}^{2(-)} + (U_{p,2} - \gamma_{i+1}^{2(-)}) \cdot \varphi_j(y) + (U_{p,4} - \gamma_{i+1}^{2(-)}) \cdot \varphi_{j+1}(y) \right);$$

$$S2_{ij}(p, x, y) = H_j(y) \cdot \left(\gamma_j^{1(+)} + (U_{p,1} - \gamma_j^{1(+)}) \cdot \psi_i(x) + (U_{p,2} - \gamma_j^{1(+)}) \cdot \psi_{i+1}(x) \right) +$$

$$\begin{aligned}
& +H_{j+1}(y) \cdot \left(\gamma_{j+1}^{l(-)} + (U_{p,3} - \gamma_{j+1}^{l(-)}) \cdot \psi_i(x) + (U_{p,4} - \gamma_{j+1}^{l(-)}) \cdot \psi_{i+1}(x) \right); \\
S_{12ij}(p, x, y) &= h_i(x) \cdot H_j(y) U_{p,1} + h_i(x) \cdot H_{j+1}(y) U_{p,3} + h_{i+1}(x) \cdot H_j(y) U_{p,2} + \\
& + h_{i+1}(x) \cdot H_{j+1}(y) U_{p,4}; \\
S_{ij}(p, x, y) &= S_{1ij}(p, x, y) + S_{2ij}(p, x, y) - S_{12ij}(p, x, y).
\end{aligned}$$

Матриця невідомих інтерполяційних даних

$$U_{p,q}, \quad p = \overline{1, (n-1)(m-1)}, \quad q = \overline{1, 4}$$

(значення функції) в p -ому прямокутному елементі будуються таким чином:

$$\begin{aligned}
U_{p,1} &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_i + 0 \\ y \rightarrow y_j + 0}} f(x, y), & U_{p,2} &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_{i+1} - 0 \\ y \rightarrow y_j + 0}} f(x, y), \\
U_{p,3} &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_i + 0 \\ y \rightarrow y_j - 0}} f(x, y), & U_{p,4} &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_{i+1} - 0 \\ y \rightarrow y_{j+1} - 0}} f(x, y).
\end{aligned}$$

Базисні сплайни $h_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ визначаються наступним чином:

$$h_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq x_1, \\ \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}, & x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0, & x_2 \leq x, \end{cases} \quad h_i(x) = \begin{cases} 1, & x \leq x_{i-1}, \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & x_{i+1} \leq x, \end{cases}, \quad i = \overline{2, n-1}$$

$$h_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{n-1}, \\ \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, & x_{n-1} < x < x_n, \\ 1, & x_n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Аналогічні формули можна написати і для $H_j(y)$. Функції $h_i(x)$ та $H_j(y)$ задовольняють властивості

$$h_i(x_k) = \delta_{ik}, \quad i, k = \overline{1, n}, \quad H_j(y_\ell) = \delta_{j\ell}, \quad j, \ell = \overline{1, m}.$$

Допоміжна функція $\psi_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ визначається наступним чином:

$$\begin{aligned}
\psi_i(x) &= l_i(x) + \frac{\omega(x)}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega(x) dx} \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} l_i(x) dx, \\
l_i(x) &= \prod_{\mu=1, \mu \neq i}^m \frac{x - x_\mu}{x_i - x_\mu}, \quad \omega(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i), \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega(x) dx \neq 0.
\end{aligned}$$

Аналогічні формули можна написати і для $\varphi_j(y)$, $j = \overline{1, m}$. Функції $\psi_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ та $\varphi_j(y)$, $j = \overline{1, m}$ задовольняють властивостям

$$\varphi_j(y_\ell) = \delta_{j\ell}, \quad j, \ell = \overline{1, m}, \quad \psi_i(x_k) = \delta_{ik}, \quad i, k = \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi_i(x) dx = 0, \quad \int_{y_j}^{y_{j+1}} \varphi_j(y) dy = 0. \quad (3)$$

Теорема. Оператор $S(x, y)$, визначений формулою (1), має такі інтерлінаційні властивості:

$$\int_0^1 S(x_k \pm 0, y) dy = \gamma_k^{2(\pm)} = \int_0^1 f(x_k \pm 0, y) dy;$$

$$\int_0^1 S(x, y_\ell \pm 0) dy = \gamma_\ell^{1(\pm)} = \int_0^1 f(x, y_\ell \pm 0) dy,$$

$$S(x_k + 0, y_\ell + 0) = U_{p,1}, \quad S(x_{k+1} - 0, y_\ell + 0) = U_{p,2};$$

$$S(x_k + 0, y_{\ell+1} - 0) = U_{p,3}, \quad S(x_{k+1} - 0, y_{\ell+1} - 0) = U_{p,4}.$$

Доведення. Перевіримо першу властивість. Спочатку обчислимо

$$S_{kj}(p, x_k + 0, y), \quad S_{i\ell}(p, x, y_\ell + 0), \quad k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m},$$

використовуючи властивості (2):

$$\begin{aligned} S_{kj}(p, x_k + 0, y) &= S1_{kj}(p, x_k + 0, y) + S2_{kj}(p, x_k + 0, y) - S12_{kj}(p, x_k + 0, y) = \\ &+ H_j(y) \cdot \left(\gamma_j^{1(+)} + (U_{p,1} - \gamma_j^{1(+)}) \right) + H_{j+1}(y) \cdot \left(\gamma_{j+1}^{1(-)} + (U_{p,3} - \gamma_{j+1}^{1(-)}) \right) - \\ &- H_j(y) U_{p,1} + H_{j+1}(y) U_{p,3} = \\ &= \gamma_k^{2(+)} + (U_{p,1} - \gamma_k^{2(+)} \cdot \varphi_j(y) + (U_{p,3} - \gamma_k^{2(+)} \cdot \varphi_{j+1}(y); \\ S_{i\ell}(p, x, y_\ell + 0) &= S1_{i\ell}(p, x, y_\ell + 0) + S2_{i\ell}(p, x, y_\ell + 0) - S12_{i\ell}(p, x, y_\ell + 0) = \\ &= h_i(x) \cdot \left(\gamma_i^{2(+)} + (U_{p,1} - \gamma_i^{2(+)} \right) + h_{i+1}(x) \cdot \left(\gamma_{i+1}^{2(-)} + (U_{p,2} - \gamma_{i+1}^{2(-)} \right) + \\ &+ \left(\gamma_\ell^{1(+)} + (U_{p,1} - \gamma_\ell^{1(+)} \cdot \psi_i(x) + (U_{p,2} - \gamma_\ell^{1(+)} \cdot \psi_{i+1}(x) - \right. \\ &- h_i(x) \cdot U_{p,1} + h_{i+1}(x) \cdot U_{p,2} = \\ &= \gamma_\ell^{1(+)} + (U_{p,1} - \gamma_\ell^{1(+)} \cdot \psi_i(x) + (U_{p,2} - \gamma_\ell^{1(+)} \cdot \psi_{i+1}(x). \end{aligned}$$

А тепер обчислимо інтеграли, використовуючи властивості (3):

$$\int_0^1 S(x_k + 0, y) dy = \sum_{j=1}^{m-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} S_{kj}(p, x_k + 0, y) dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{m-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left(\gamma_k^{2(+)} + (U_{p,1} - \gamma_k^{2(+)}) \cdot \varphi_j(y) + (U_{p,3} - \gamma_k^{2(+)}) \cdot \varphi_{j+1}(y) \right) dy = \\
&= \sum_{j=1}^{m-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \gamma_k^{2(+)} dy = \gamma_k^{2(+)} \cdot \sum_{j=1}^{m-1} (y_{j+1} - y_j) = \gamma_k^{2(+)} \cdot (y_m - y_1) = \gamma_k^{2(+)}; \\
&\int_0^1 S(x, y_\ell + 0) dx = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} S_{i\ell}(p, x, y_\ell + 0) dx = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\gamma_\ell^{1(+)} + (U_{p,1} - \gamma_\ell^{1(+)}) \cdot \psi_i(x) + (U_{p,2} - \gamma_\ell^{1(+)}) \cdot \psi_{i+1}(x) \right) dx = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \gamma_\ell^{1(+)} dx = \gamma_\ell^{1(+)} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = \gamma_\ell^{1(+)}.
\end{aligned}$$

Перевіримо одну з чотирьох властивостей:

$$\begin{aligned}
S(x_k + 0, y_\ell + 0) &= S1_{k\ell}(p, x_k + 0, y_\ell + 0) + S2_{k\ell}(p, x_k + 0, y_\ell + 0) - \\
&\quad - S12_{k\ell}(p, x_k + 0, y_\ell + 0) = \\
&= \left(\gamma_i^{2(+)} + (U_{p,1} - \gamma_i^{2(+)}) \right) + \left(\gamma_j^{1(+)} + (U_{p,1} - \gamma_j^{1(+)}) \right) - U_{p,1} = U_{p,1}
\end{aligned}$$

Аналогічно перевіряються й інші три властивості.

Теорема доведена.

Зауваження. У формулі (1) заданим є числа $\gamma_i^{2(\pm)}, \gamma_j^{1(\pm)}$ (дані проекції, які надходять з томографа). Інтерполяційні дані $U_{p,q}$ є невідомими величинами, які будемо знаходити з умови

$$\begin{aligned}
I(U) &= \sum_{p=1}^{(n-1)(m-1)} (I1(p, U) + I2(p, U)) \rightarrow \min_{U_{p,q}} \quad (4) \\
I1(p, U) &= \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left(\gamma_i^{2(+)} + (U_{p,1} - \gamma_i^{2(+)}) \cdot \varphi_j(y) + (U_{p,3} - \gamma_i^{2(+)}) \cdot \varphi_{j+1}(y) + \right. \\
&\quad \left. + \gamma_{i+1}^{2(-)} + (U_{p,2} - \gamma_{i+1}^{2(-)}) \cdot \varphi_j(y) + (U_{p,4} - \gamma_{i+1}^{2(-)}) \cdot \varphi_{j+1}(y) \right)^2 dy; \\
I2(p, U) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\gamma_j^{1(+)} + (U_{p,1} - \gamma_j^{1(+)}) \cdot \psi_i(x) + (U_{p,2} - \gamma_j^{1(+)}) \cdot \psi_{i+1}(x) + \right. \\
&\quad \left. + \gamma_{j+1}^{1(-)} + (U_{p,3} - \gamma_{j+1}^{1(-)}) \cdot \psi_i(x) + (U_{p,4} - \gamma_{j+1}^{1(-)}) \cdot \psi_{i+1}(x) \right)^2 dx.
\end{aligned}$$

Вигляд такого функціоналу обґрунтований в монографії *О. М. Литвина* [2].

Алгоритм відновлення розривної функції за відомими даними Радона. Проведемо через область визначення розривної функції $f(x, y)$ прямі лінії

$$x_1 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1, \quad y_1 = 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1$$

з кроками hx та hy . У якості інформації про функцію будемо вважати дані Радона

$$\gamma_i^{2(+)}, i = \overline{1, n-1}, \quad \gamma_j^{1(+)}, j = \overline{1, m-1}, \quad \gamma_k^{2(-)}, k = \overline{2, n}, \quad \gamma_\ell^{1(-)}, \ell = \overline{2, n},$$

тобто інтеграли вздовж цих прямих.

Крок 1. Будемо розривний інтерлінаційний сплайн за формулою (1), який в кожному елементі розбиття може мати різний аналітичний вигляд

$$S(p, U, x, y),$$

де p – номер прямокутного елемента,

$$U_{p,q}, p = \overline{1, (n-1)(m-1)}, q = \overline{1, 4}$$

– невідома матриця інтерполяційних даних функції.

Крок 2. Знаходимо матрицю U з умови (4). Після підстановки цієї матриці в інтерлінант (1), отримаємо розривний інтерлінаційний сплайн, що складається з функцій $S(x, y)$.

Крок 3. Зменшуємо крок вдвічі:

$$hx^* = hx/2, \quad hy^* = hy/2$$

та знову виконуємо крок 1 та крок 2, використовуючи вдвічі меншу сітку. В результаті отримаємо розривний сплайн

$$S^*(x, y) = S^*_{i'j'}(p^*, x, y), \quad (x_{i'}, y_{j'}) \in \Pi^*_{i'j'}, \quad p^* = \overline{1, (2m-1)(2n-1)}$$

на кожному з прямокутників

$$\Pi^*_{i',j'} = (x - x_{i'}) \times (y - y_{j'}), \quad x_{i'} = x_i + h1^*, \quad y_{j'} = y_j + h2^*.$$

Крок 4. На кожному прямокутному елементі $\Pi_{i,j}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$ обчислюємо значення

$$\widetilde{J}_{ij} = \max_{\substack{x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ y_j \leq y \leq y_{j+1}}} J_{ij}(x, y), \quad J_{ij}(x, y) = |S(p, x, y) - S^*(p^*, x, y)|.$$

Крок 5. Перевіряємо виконання умови

$$|S(x, y) - S^*(x, y)| < \varepsilon, \forall (x, y) \in E,$$

де ε – задана точність. Якщо умова виконана, то сплайн $S^*(x, y)$ – це отримана математична модель розривної функції $f(x, y)$. Якщо умова не виконана, то $S(x, y) := S^*(x, y)$, і повертаємося на крок 3.

Чисельний експеримент. Перевіримо викладену теорію на відомому в комп'ютерній томографії *фантомі Шеппа-Логана*. Зображення фантома ілюструє багато особливостей, які у дійсності властиві реальним томографічним зображенням голови людини. Розміщені в центрі фантома об'єкти у вигляді еліпсів моделюють реальні внутрішні особливості побудови голови людини. В середині кожного еліпса щільність внутрішньої структури голови різна. В роботі [14] представлені параметри усіх еліпсів, з яких складається фантом Шеппа-Логана. Фантом розміщений у квадраті $D = [-1, 1]^2$. Ми для прикладу оберемо самі великі еліпси (таблиця).

Таблиця – Параметри еліпсів у фантомі Шеппа-Логана

№ еліпсу	C_x	C_y	r_x	R_y	Нахил градусів	Щільність
1	0.000	0.000	0.690	0.900	0000	2.000
2	-0.220	0.250	0.410	0.210	-72.00	-0.020
4	0.220	0.250	0.310	0.220	72.00	-0.020
5	0.000	0.250	0.210	0.350	0.000	0.010

І задамо фантом у вигляді функції двох змінних, яка має розриви першого роду на лініях еліпсів.

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & \frac{x^2}{0.69^2} + \frac{y^2}{0.9^2} \leq 1; \\ -0.02, & \frac{((x + 0.22)\cos(-0.4\pi) + (y - 0.25)\sin(-0.4\pi))^2}{0.410^2} + \\ & + \frac{(-(x + 0.22)\sin(-0.4\pi) + (y - 0.25)\cos(-0.4\pi))^2}{0.21^2} \leq 1; \\ -0.02, & \frac{((x - 0.22)\cos(-0.4\pi) + (y - 0.25)\sin(-0.4\pi))^2}{0.310^2} + \\ & + \frac{(-(x - 0.22)\sin(-0.4\pi) + (y - 0.25)\cos(-0.4\pi))^2}{0.22^2} \leq 1; \\ 0.01, & \frac{x^2}{0.21^2} + \frac{(y - 0.25)^2}{0.35^2} \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

Зобразимо цю функцію у лініях рівня (рис.1)

Оберемо рівномірну сітку по вісі x :

$$x_1 = 0, x_2 = 0.25, x_3 = 0.5, x_4 = 0.75, x_5 = 1.$$



Рис. 1 – Спрощений
фантом
Шеппа-Логана.

По вісі y оберемо аналогічну сітку. Вважаємо заданими проекції вздовж цих ліній. Оскільки комп'ютерний томограф може надати вздовж однієї лінії лише одне значення проекції, тому на першому кроці ми вважаємо проекції зліва і справа від заданої лінії рівними. Тобто проекції вздовж ліній, паралельних вісі Oy , мають вигляд:

$$\gamma_1^{2(+)} = \int_0^1 f(x_1 + 0, y) dy = 0,$$

$$\gamma_2^{2(-)} = \int_0^1 f(x_2 - 0, y) dy = 0.548,$$

$$\gamma_2^{2(+)} = \int_0^1 f(x_2 + 0, y) dy = 0.548, \quad \gamma_3^{2(-)} = \int_0^1 f(x_3 - 0, y) dy = 1.303,$$

$$\gamma_3^{2(+)} = \int_0^1 f(x_3 + 0, y) dy = 1.303, \quad \gamma_4^{2(-)} = \int_0^1 f(x_4 - 0, y) dy = 0.657,$$

$$\gamma_4^{2(+)} = \int_0^1 f(x_4 + 0, y) dy = 0.657, \quad \gamma_5^{2(-)} = \int_0^1 f(x_5 - 0, y) dy = 0.$$

А проекції вздовж ліній паралельних вісі Ox мають вигляд

$$\gamma_1^{1(+)} = \int_0^1 f(x, y_1 + 0) dx = 0, \quad \gamma_2^{1(-)} = \int_0^1 f(x, y_2 - 0) dx = 1.147,$$

$$\gamma_2^{1(+)} = \int_0^1 f(x, y_2 + 0) dx = 1.147, \quad \gamma_3^{1(-)} = \int_0^1 f(x, y_3 - 0) dx = 0.597,$$

$$\gamma_3^{1(+)} = \int_0^1 f(x, y_3 + 0) dx = 0.597, \quad \gamma_4^{1(-)} = \int_0^1 f(x, y_4 - 0) dx = 0.729,$$

$$\gamma_4^{1(+)} = \int_0^1 f(x, y_4 + 0) dx = 0.729, \quad \gamma_5^{1(-)} = \int_0^1 f(x, y_5 - 0) dx = 0.$$

І на заданій системі прямокутних елементів будемо розривний інтерлінаційний сплайн за формулою (1). Зобразимо його на рис.2.

З рис.1 бачимо, що, оскільки лінії розриву попали в кожний прямокутний елемент, то й всі вони зафарбувалися. Зменшимо крок сітки за обома змінними вдвічі, та знову побудуємо розривний інтерлінаційний сплайн (рис.3).

На рис. 3 вже бачимо, що серед прямокутних елементів є такі, куди не попадають лінії розриву, і вони залишилися не зафарбованими.

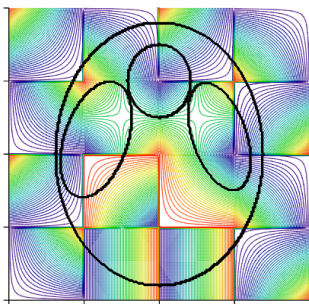


Рис. 2 – Зображення фантому та лінії рівня наближеного розривного інтерплінаційного сплайна на першій ітерації.

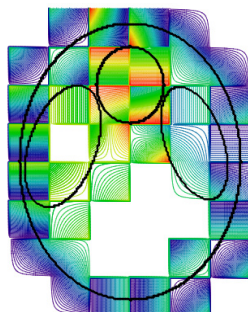
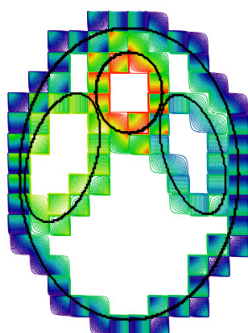
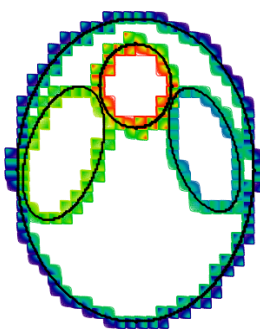


Рис. 3 – Зображення фантому та лінії рівня наближеного розривного інтерплінаційного сплайна на другій ітерації.

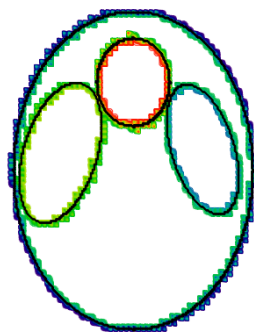
Продовжуємо цей ітераційний процес до тих пір, поки не отримаємо всі лінії розриву тієї товщини, якої потрібно. На рис. 4 наведені наступні ітерації.



a



б



в

Рис.4 – Зображення фантому та лінії рівня наближеного розривного інтерплінаційного сплайну при розбитті: *a* – $m = 17$, $n = 17$, *б* – $m = 33$, $n = 33$, *в* – $m = 65$, $n = 65$.

На рис. 4в бачимо, що побудований розривний інтерплінаційний сплайн описує лінії розриву заданого фантому. Цей ітераційний процес можна продовжувати.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективним розвиток теорії наближення розривних функцій багатьох змінних розривними сплайнами та побудову математичних моделей розривних процесів на основі розробленої теорії, оскільки, як вже було зазначено, задачі дослідження процесів, що мають розриви, виникають значно частіше, ніж задачі дослідження неперервних процесів.

Наступним кроком автори планують розробити алгоритми відтворення ліній розриву функцій двох змінних, використовуючи трикутні елементи та елементи з однією криволінійною стороною, з метою оптимізації кількості

обчислень.

Висновки. Таким чином, в роботі запропоновано метод відновлення внутрішньої структури двовимірного тіла за відомими її проєкціями вздовж системи заданих ліній (даними Радона). Метод суттєво використовує інтерлінацію функцій та неоднорідну внутрішню структуру двовимірного тіла. Розглянуто приклад знаходження ліній розриву у фантомі Шеппа-Логана.

Список літератури: 1. Попов Б. А. Равномерное приближение сплайнами. – Киев.: Наукова думка, 1989. – 272с.; 2. Литвин О.М. Интерлиная функций та деякі її застосування. – Х.: Основа, – 2002. – 544с.; 3. Петровская Н.Б. Аппроксимация разрывных решений для одного класса схем высокого порядка // Математическое моделирование. – Москва. – 2005. – Т. 17. – №1. – С. 79 – 92; 4. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Анализ многокомпонентных распределенных систем и оптимальное управление. Наукова Думка. – Киев. – 2007. – 703с.; 5. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. – Киев: Наукова думка, – 2001. – 606с.; 6. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. – Киев: Наук. думка, – 2003. – 506с.; 7. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Системный анализ упругих и термоупругих неоднородных тел. – Киев: Наукова думка, – 2012. – 511с.; 8. Abdul J. Jerri, Ed. Advances in the Gibbs Phenomenon // Clarkson University Σ Sampling Publishing Potsdam, New York Copyright. – 2011. – 424 pp.; 9. S. Gottlieb, Jae-Hun Jung, S. Kim. A Review of David Gottlieb's Work on the Resolution of the Gibbs Phenomenon // Commun. Comput. Phys. – Beijing. – Vol. 9, No. 3. – 2011. – 497 – 519.; 10. Литвин О.М., Першина Ю.І. Побудова кусково-білінійних сплайнів для наближення функцій з розривами першого роду у вузлах ректангуляції двовимірної області // Таврічний вісник інформатики та математики. – Симферополь. – 2011. – №1. – С. 63 – 72.; 11. Литвин О.Н., Першина Ю.І. Приближение разрывной функции двух переменных с помощью разрывных сплайнов двух переменных (прямоугольные элементы) – Компьютерная математика. – Киев, – 2011. – №1. – С.96 – 105.; 12. Литвин О.М., Першина Ю.І. Приближение разрывных функций двух переменных с разрывами первого рода на линиях триангуляции двумерной области // Управляющие системы и машины. – Киев, – 2011, – №5. – С.34 – 47.; 13. Литвин О.М., Першина Ю.І. Наближення розривної функції розривним сплайном, коли вузли сплайна не збігаються з розривами функції. – Інститут проблем математики і механіки // Праці ІПММ НАН України. – Т.24. – Донецьк, 2012. – С. 157 – 165; 14. Синьков М.В., Закидальский А.И. Объемная реконструкция «больших» объектов на томографах с ограниченной по размерам матрицей детекторов. // Ресстрация, зберігання і обробка даних. – Т. 5. – № 3, – 2003, – С.18 – 25.

Надійшла до редколегії 13.10.2013

УДК 519.6

Відновлення розривної внутрішньої структури двовимірного тіла за відомими її проєкціями вздовж взаємно перпендикулярних ліній. / О. М. Литвин, Ю.І. Першина // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №54 (1027). – С. 144 – 154. Бібліогр.: 14 назв.

Предложен метод восстановления внутренней структуры двумерного тела по известным ее проєкциям вдоль системы заданных линий (данными Радона). Метод существенно использует интерлиацию функций и неоднородную внутреннюю структуру двумерного тела. Рассмотрен пример нахождения линий разрыва в фантоме Шеппа-Логана.

Ключевые слова: интерлиация, компьютерная томография, фантом Шеппа-Логана, данные Радона.

We propose a method for reconstructing a two-dimensional internal structure of the body by its well-known set of projections along the lines (data Radon). The method essentially uses interlination functions and heterogeneous internal structure of two-dimensional body. An example of finding the lines of discontinuity in the Shepp-Logan phantom.

Key words: interlination, computed tomography, Shepp-Logan phantom, the Radon data.